x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	↗	0

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - e^{2x}} = 1$.

4) a) f continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ donc f admet une fonction Réciproque f^{-1} définie sur

$f(]-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to -\infty} f \right[= [0,1[= E$

b) $y \in]-\infty, 0], x \in [0,1[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

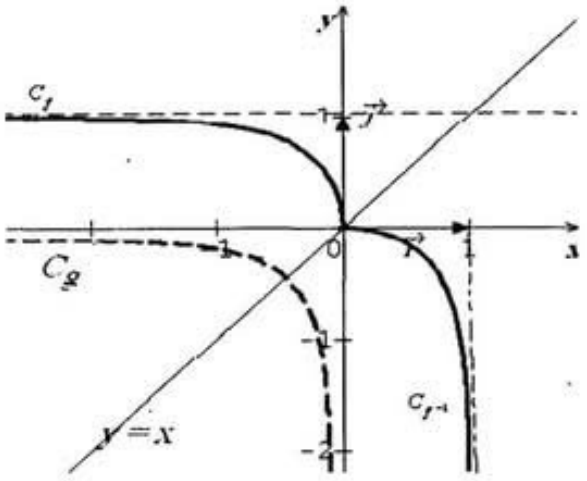
On a : $f(y) = \sqrt{1-e^{2y}} = x$

$\Leftrightarrow 1 - e^{2y} = x^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = e^{2y}$

$\Leftrightarrow \ln(1-x^2) = 2y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = y$

D'où $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2), x \in [0,1[}$

c) Courbe :



5) $g(x) = x + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x} - 1)$

a) Soit $x \in]-\infty, 0[$

$\ln(f(x)) = \ln\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\ln(1-e^{2x})$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left[e^{2x}(e^{-2x}-1)\right]\right]$ $\quad \boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$

$= \frac{1}{2}\ln e^{2x} + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}-1)$

Or $\boxed{\ln e^{2x} = 2x}$

Donc $g(x) = x + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}-1)$ $\forall x \in D\text{-}\{0\}$

b/ $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ et $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ $x \in]-\infty, 0[$

Donc g'(x) < 0

T.V :

x	$-\infty$		0
$g'(x)$		$+$	
$gf(x)$	0	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(f(x))$, *on pose* $X = f(x)$

$= \lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(f(x))$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X$ $(on\ pose\ X = f(x) > 0)$

$= -\infty$

$y = 0$ et $x = 0$ sont deux asymptotes à C_g.

Exercice 17

$g(x) = -x - 1 + e^x$

1) $g'(x) = -1 + e^x$

$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

le signe de $g'(x)$ est celui de $e^x - 1$.

- Si $x \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0$

Donc g est strictement croissante

- Si $x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow e^x - 1 \leq 0$

Donc g est strictement décroissante